Sztochasztikus folyamatok regularitása

Arató Mátyás

1. Az f-regularitás fogalma

A sztochasztikus folyamatok elméletében az utóbbi tiz évben fontos szerepet játszanak az un. regularitási fogalmak, melyek arról adnak felvilágositást, hogy az adott folyamat mennyire tekinthető függetlennek, ill. milyen "távol" vannak a függetlenségtől a mult és jövő eredményei. A legegyszerübb regularitási fogalom a 0-1 törvény segitségével adható meg. A $\xi_n, \{n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ folyamat $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_m$ változói által generált legkisebb σ -algebrát $\mathfrak{M}_n^m$ -el jelölve (ahol n és m a $\pm\infty$ értékeket is felvehetik) a folyamatot regulárisnak nevezzük, ha

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}_{-\infty}^{n} = \mathfrak{N} \qquad /1/$$

ahol $\mathfrak{N} = \{\emptyset, \Omega\}$ az un. triviális σ -algebra, azaz a ξ_n folyamatra fennáll a 0-1 törvény. Független sorozatok egyben regulárisak is Kolmogorov tétele szerint.

Stacionárius folyamatok (tágabb értelemben) esetén szokás lineáris regularitásról beszélni, melyen a következőt értjük. Jelölje a $H_{-\infty}^{n}$ a $\xi(k), k \le n$, változók által generált Hilbert-teret $(M\xi(k)=0,\ D^2\xi(k)=\sigma^2<\infty)$. A $\xi(k)$ folyamat lineárisan reguláris, ha

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_{-\infty}^{n} = 0 \qquad /2/$$

Stacionárius sorozatokra az /1/ regularitásból következik a /2/ regularitás. (Lásd pl. Rozanov [1] 245-248.) Gauss-folyamatok esetén a két regularitás ekvivalens. Könnyü megmutatni, hogy stacionárius sorozatokra /1/ a következő feltétellel helyettesithető (Vinokurov tétele):

$$\sup_{B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{n}} |P(AB) - P(A)P(B)| \to 0 \qquad ha\ n \to -\infty \qquad /3/$$

(lásd pl. Rozanov [1] 247.o.)

A /3/ alakban megadott regularitási feltétel alapján érthető, hogy felvetődik a

$$\sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty} \\ B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^{0}}} |P(AB) - P(A)P(B)| = \alpha(\tau) \to 0, \ ha\ \tau \to \infty \qquad /4/$$

alaku regularitás az un. teljes regularitás fogalmának bevezetése. A /4/ alaku feltételt M.Rosenblatt vezette be 1956-ban [1] s erős keverési feltételnek nevezte. Ennek a fogalomnak a tanulmányozása és hasznosságának vizsgálata szerepel Volkonszkij és Rozanov, valamint Kolmogorov-Rozanov cikkeiben. Többek között bebizonyitották, hogy ha $\rho(\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}, \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}) = \rho(\tau)$ jelöli a zárójelben lévő σ -algebrák maximál korrelációját, akkor Gauss folyamatokra

$$\alpha(\tau) \leq \varrho(\tau) \leq 2\pi\,\alpha(\tau) \qquad /5/$$

Az egyenletes teljes regularitás

$$\sup_{\substack{A \in \mathfrak{M}_\tau^\infty \\ B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0}} \frac{|P(AB) - P(A)P(B)|}{P(A)} = \gamma(\tau) \to \infty, \text{ ha } \tau \to \infty \qquad /6/$$

fogalma igen erős feltételt jelent, mivel Gauss folyamatok esetén m-függetlenséget jelent (lásd pl. Ibrahimov-Linnik könyvét 396.old.). /4/-nél erősebb regularitás a Kolmogorov által javasolt erős regularitás, melynek definiciója:

$$(7)\ \operatorname*{Var}_{C \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0 \times \mathfrak{M}_\tau^\infty} [P(C) - P_{[-\infty,0]} \times P_{[\tau,\infty]}(C)] = M \operatorname*{Var}_{A \in \mathfrak{M}_\tau^\infty} [P(A|\mathfrak{M}_{-\infty}^0) - P(A)] = \beta(\tau) \to 0 \quad \text{ha } \tau \to \infty \qquad /7/$$

Ahol P jelöli az eredeti mértéket $P_{[-\infty,0]} \times P_{[\tau,\infty)}$, pedig az $\mathfrak{M}_{-\infty}^0$ ill. $\mathfrak{M}_\tau^\infty$ σ -algebrákon értelmezett P mértékek (marginális eloszlások) direkt szorzatát. Nyilvánvaló, hogy $\alpha(\tau) \leq \beta(\tau)$.

A /7/ variációs távolsággal értelmezett erős regularitás, valamint az

$$(8)\ I(\mathfrak{M}_{-\infty}^0, \mathfrak{M}_\tau^\infty) = M_p \log p = I(\tau) \to 0, \quad \text{ha } \tau \to \infty \qquad /8/$$

információs regularitás is speciális esetei a Csiszár Imre által bevezetett f-eltéréseken alapuló regularitásnak (lásd Csiszár [1]), melyet alább definiálunk.

Legyen μ_1 és μ_2 két valószinüségi mérték az $(\Omega, \mathfrak{A})$ mérhető téren, melyek abszolut folytonosak a λ mértékre nézve. A μ_1, μ_2 -mértékek f-eltérésének (ahol f(x) egy tetszőleges konvex függvény) az

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2)=\int p_2(x)\, f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right) \lambda(dx) \qquad /9/$$

mennyiséget nevezzük, ahol

$$p_i(x) = \frac{\mu_i(dx)}{\lambda(dx)}, \qquad (i=1,2)$$

a μ_i -mértékek λ (σ-véges) mértékre vonatkozó Radon-Nikodym deriváltjai.

<u>Definició.</u> Legyen $\mu_1=P$ és $\mu_2=P_{(-\infty,0]}\times P_{[\tau,\infty)}$ a két mérték az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}\times\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ σ-algebrán. A ξ_n folyamatot f-regulárisnak mondjuk, ha

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) \to f(1), \quad ha \quad \tau\to\infty \qquad /10/$$

Könnyü belátni, hogy f(x) = |x-1| esetén

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2,\tau)=\int p_2(x)\left|\frac{p_1(x)}{p_2(x)}-1\right|\lambda(dx)=|\mu_1-\mu_2|=Var\left[P-P_{(-\infty,0]}\times P_{(\tau,\infty)}\right]$$

tehát a Kolmogorov féle erős regularitás adódik.

Az információs regularitás az f-regularitás speciális esete, ha f(x) = x log x

$$J_{x\log x}(\mu_1,\mu_2,\mathcal{T}) = J_{-\log u}(\mu_2,\mu_1,\mathcal{T}) = \int \log \frac{\mu_1(dx)}{\mu_2(dx)}\,\mu_1\,(dx)$$

ha $\mu_1 \ll \mu_2$, egyébként $I(\mathcal{T}) = +\infty$

A Rényi által bevezetett α -adrendü I-divergencia alapján beszélhetünk α -adrendü regularitásról, ha ezalatt azt értjük, hogy

$$\frac{1}{\alpha-1}\log|J_{u^\alpha}(\mu_1,\mu_2,\mathcal{T})| \to 0\,,\ (\alpha<1),\quad ha\quad \mathcal{T}\to\infty \qquad /11a/$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\log\, J_{u^\alpha}(\mu_1,\mu_2,\mathcal{T}) \to 0\ \ (\alpha>1),\quad ha\quad \mathcal{T}\to\infty \qquad /11b/$$

Lényeges megjegyezni, hogy α -regularitásról $\alpha<1$ esetén mindig beszélhetünk, kivéve, ha $\mu_1 \perp \mu_2$ (azaz a két mérték szinguláris).

χ^2 -regularitásról beszélünk $f(x) = (x-1)^2$ vagy $f(x) = x^2-1$ esetén.

2. Az f-regularitások viszonyának vizsgálata

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy szigoruan konvex (az $x = 1$ pontban) $f(x)$ függvény esetén az f-regularitás maga után vonja az erős regularitást. Az $f(x)$ függvény az x_0 pontban szigoruan konvex, ha az x_0 pont egyetlen környezetében sem lineáris.

<u>2.1.Tétel.</u> Ha az f(x) konvex függvény x=1 -ben szigoruan konvex, akkor az f-regularitásból következik az erős regularitás. Pontosabban, megadható olyan $\varphi_f(v)$ függvény, hogy $v \downarrow 0$ esetén $\varphi_f(v) \downarrow 0$ és

$$\beta(\tau) \leq \varphi_f\left(\mathrm{J}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) - f(1)\right) \qquad /12/$$

Ha $f''(1) > a > 0$, akkor elég kis δ -ra $\varphi_f(\delta) \sim c\sqrt{\delta}$.
Ha $f''(u) \geq a > 0$, ha $|u-1| < r_0$, akkor $\delta \leq \frac{a}{2} r_0^2$ esetén igaz, hogy

$$\beta(\tau) \leq C\sqrt{\delta}, \quad \text{ha } \mathrm{J}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) - f(1) \leq \delta \leq \frac{a}{2} r_0^2 \qquad /13/$$

A tétel bizonyitása közvetlenül következik Csiszár dolgozatának 2.1.tételéből μ_1 és μ_2 megfelelő helyettesitésével.

<u>Megjegyzés.</u> A becslésben szereplő C konstans vehető $\sqrt{\frac{8}{a}}$ -nak de minimális értéke adott f(x) esetén meghatározható. Pl.: f(x)=x log x esetén $C_{min} = \sqrt{2}$ (v.ö. Volkonszkij és Rozanov eredményével).

<u>2.2.Tétel.</u> Ha a $\overline{\lim_{x\to 0}} f(x)$ és $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ határértékek végesek és f(x) szigoruan konvex az 1. pontban, akkor az erős regularitásból következik az f-regularitás. Pontosabban

$$\mathrm{J}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) \leq f(1) + C_1\sqrt{\beta(\tau)} \qquad /14/$$

ahol C_1 csak az f-függvénytől függ.

A tétel bizonyitása következik Csiszár 2.2. tételéből.

Megjegyzés. Az információs regularitásból, az α-adrendü regularitásból (ha $\alpha>1$), valamint a χ^2 regularitásból következik az erős regularitás, azonban az állitás megforditása nem igaz.

Jelölje $\mu_{1\tau}(\tau)$ abszolut folytonos ill. szinguláris részét a $\mu_{2\tau}$ mértékre nézve $\mu^{*}_{1\tau}(\tau)$ ill. $\mu'_{2\tau}(\tau)$. A $\mu_{2\tau}(\tau)$ abszolut folytonos, illetve szinguláris részét $\mu_{1\tau}(\tau)$ -ra nézve jelölje $\mu^{*}_{2\tau}(\tau)$ ill. $\mu'_{2\tau}(\tau)$.

Ha

$$p_\tau(x)=\frac{\mu_{1\tau}(dx)}{\mu_{2\tau}(dx)}, \qquad \bar{p}_\tau(x)=\frac{\mu_{2\tau}(dx)}{\mu_{1\tau}(dx)}$$

akkor

$$\beta(\tau)=\mathrm{Var}(\mu_{1\tau}-\mu_{2\tau})=\mu'_{2\tau}(\Omega)+M|1-p_\tau(x)|= \qquad /15/$$

$$=\mu'_{1\tau}(\Omega)+M|1-p_\tau(x)| .$$

2.3.Tétel. (Volkonszkij-Rozanov). Az erős regularitás szükséges és elégséges feltétele az

a/ $\lim\limits_{\tau\to\infty}\mu'_{2\tau}(\Omega)=0$ vagy b/ $\lim\limits_{\tau\to\infty}\mu'_{1\tau}(\Omega)=0$

feltételek egyikének a teljesülése és a folyamat regularitása.

Ugyancsak hasznos a következő állitás.

2.4.Tétel. (Volkonszkij-Rozanov). Az erős regularitás szükséges és elégséges feltétele az

a/ $p_\tau(x) \to 1$, ha $\tau \to \infty$ (μ_{20} szerint) b/ $\bar{p}_\tau(x) \to 1$, ha $\tau \to \infty$ (μ_{10} szerint)

sztochasztikus konvergenciák egyikének a fennállása.

A 2.3.tétel közvetlen következménye, hogy reguláris folyamat esetén a folyamat egyben erősen reguláris, ha valamilyen τ-ra $\mu_{1\tau}$ és $\mu_{2\tau}$ egyike abszolut folytonos a másikra nézve.
Ez teljesül pl. ha az

$$I(\tau) < \infty$$

feltétel fenn áll.

Ugyancsak a 2.1. és 2.2. tételekből, valamint a 2.3.-ból következik, hogy az α-adrendü ($\alpha = 1$) információ létezéséből valamilyen τ-ra következik az α (<1)-regularitás.

A χ^2 eltérés létezéséből valamilyen τ-ra következik az erős regularitás és az α-regularitás ($\alpha < 1$ esetén).

Az egyenletes teljes regularitást

$$\sup_{\substack{C = AB \\ A \in \mathfrak{M}_\tau^\infty \\ B \in \mathfrak{M}_{-\infty}^0}} \frac{\mu_{1\tau}(C) - \mu_{2\tau}(C)}{\mu_{1\tau}(C) + \mu_{2\tau}(C)} \to 0 \qquad /16/$$

alakba irva látható, hogy az ekvivalens a $\rho_\tau(x)$ vagy $\tilde{\rho}_\tau(x)$ egyenletes konvergenciájával 1-hez, ha $\tau \to \infty$ (a μ_{10} ill. μ_{20} mérték szerint). A /16/ feltételből már bármilyen f-regularitás következik, mivel

$$\text{vrai sup}\, |\rho_\tau(x) - 1| < \delta$$

esetén

$$J_f(\mu_{1\tau}, \mu_{2\tau}) = \int f(\rho_n(x))\mu_{10}(dx) \leq f(1) + \varepsilon,$$

ahol $\varepsilon = \max |f(z) - f(1)| \to 0$ ha $\delta \to 0$.

3. Gauss folyamatok.

Az $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0}$ és $\mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$ σ-algebrákon választható olyan $u_1, u_2, \ldots$ ill. $v_1, v_2, \ldots$ ortogonális bázis, hogy $M u_i v_k = \delta_{ik} \varrho_k$, és ekkor

$$I(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \log(1 - \varrho_k^2),$$

$$\alpha(\tau) = \sup_k \varrho_k,$$

$$J_{\chi^2 - 1}(\mu_{1\tau}, \mu_{2\tau}) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \varrho_k^2).$$

Az α és erős regularitás Gauss folyamatok esetén nem ad ujat az információs regularitással szemben.

Irodalom:

[1] Csiszár I.: Eloszlások eltérésének információ-tipusu mértékszámai. MTA III. Oszt.Közleményei 17 /1967/ 123-149.

[1] Ibrahimov - Linnik Ju.V.: Nyezaviszimüje i sztacionarno szvjazannüje velicsimü, Nauka, 1965.

[3] Kolmogorov A.N. - Rozanov Ju.A.: Ob uszloviah szilnovo peremesivanyija gausszovszkovo sztacionarnovo processza. Teorija verojatnosztyej 5 /1960/ 222-227.

[4] Rozanov Ju.A.: Sztacionarnüje szlucsajnüje processzü. Fizmatgiz, 1963.

[5] Rozanov Ju.A. - Volkonszkij V.A.: Nekotorüje pregyelnüje teoremü dlja szlucsajnüh funkcij. Teorija verojatnosztyej 6 /1961/.

[6] Rosenblatt M.: A central limit theorem and a strong mixing condition. Proc. Nat.Acad.Sci. USA 42, Nol. /1956/ 43-47.

Summary

Regularity of stochastic processes

There is given a systematical survey of regularity properties of stochastic processes. We say, that the process (stationary) has the property of f-regularity (in the mean of Csiszár) if

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) \to f(1)$$

where f(x) is a convex function and $\mu_1 = P$ (the probability distribution on $\mathfrak{M}_{-\infty}^{0} \times \mathfrak{M}_{\tau}^{\infty}$), $\mu_2 = P_{(-\infty,0)} \times P_{(\tau,\infty)}$

$$\mathfrak{I}_f(\mu_1,\mu_2,\tau) = \int p_2(\omega)\, f\left(\frac{p_1(\omega)}{p_2(\omega)}\right) \lambda\, d\omega \,, \qquad p_i(\omega) = \frac{\mu_i(d\omega)}{\lambda(d\omega)}$$

We show that the f-regularity does not give anything new for Gaussion processes, in this case if is equivalent of the informational regularity, when f is convex in the strict sense.